



Inspectoratul Școlar Județean Timiș

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
5.02.2026

Clasa a V-a
Barem de corectare și notare

1. Se dau numerele:

$$A = 2^{2026} \cdot 3^{2026} \cdot 10 + 2^{2030} \cdot 3^{2026} - 6^{2026} \text{ și } B = 25^{1010} \cdot 5^{2^3} + 2 \cdot 5^{2027} + 25^{1013}$$

a) Arătați că A este pătrat perfect, iar $A \cdot B$ este cub perfect.

b) Aflați ultimele 2029 cifre ale produsului $A \cdot B$.

Soluție:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= 2^{2026} \cdot 3^{2026} \cdot 10 + 2^{2030} \cdot 3^{2026} - 6^{2026} = \\ &= 2^{2026} \cdot 3^{2026} \cdot 10 + 2^{2026} \cdot 2^4 \cdot 3^{2026} - 6^{2026} \dots\dots\dots 1p \\ A &= 6^{2026} \cdot 10 + 6^{2026} \cdot 16 - 6^{2026} \dots\dots\dots 1p \\ A &= 6^{2026} \cdot (10 + 16 - 1) = 6^{2026} \cdot 25 \dots\dots\dots 1p \\ A &= (6^{1013})^2 \cdot 5^2 = (6^{1013} \cdot 5)^2, \text{ deci } A \text{ este pătrat perfect} \dots\dots\dots 2p \\ B &= 25^{1010} \cdot 5^{2^3} + 2 \cdot 5^{2027} + 25^{1013} = 25^{1010} \cdot 5^8 + 2 \cdot 5^{2027} + 25^{1013} \dots\dots\dots 1p \\ B &= (5^2)^{1010} \cdot 5^8 + 2 \cdot 5^{2027} + (5^2)^{1013} = 5^{2020} \cdot 5^8 + 2 \cdot 5^{2027} + 5^{2026} = \\ &= 5^{2028} + 2 \cdot 5^{2027} + 5^{2026} \dots\dots\dots 3p \\ B &= 5^{2026} \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^{2026} \cdot 5 + 5^{2026} = 5^{2026} \cdot (25 + 10 + 1) = 5^{2026} \cdot 36 \dots\dots\dots 2p \\ A \cdot B &= 6^{2026} \cdot 25 \cdot 5^{2026} \cdot 36 = 6^{2026} \cdot 5^2 \cdot 5^{2026} \cdot 6^2 = 6^{2028} \cdot 5^{2028} \dots\dots\dots 2p \\ A \cdot B &= 30^{2028} = (30^{676})^3 \text{ care este cub perfect} \dots\dots\dots 2p \\ \text{b) } A \cdot B &= 30^{2028} = 3^{2028} \cdot 10^{2028} \dots\dots\dots 1p \\ \text{Ultimele 2028 cifre ale numărului } A \cdot B &\text{ sunt toate zero } \dots\dots\dots 1p \\ \text{Cifra de pe poziția 2029 este } U(3^{2028}) &= 1 \dots\dots\dots 2p \\ \text{Deci, ultimele 2029 cifre ale numărului } A \cdot B &\text{ sunt formate din cifra 1, urmată de cele 2028} \\ \text{zerouri } \dots\dots\dots 1p \end{aligned}$$

2. Un număr natural de trei cifre împărțit la răsturnatul său dă câtul 3 și restul 175.
Diferența dintre cifra sutelor și cifra unităților numărului dat este 7. Determinați numărul.



Soluție:

$$\overline{abc} = 3 \cdot \overline{cba} + 175, 175 < \overline{cba} \text{ și } a - c = 7, a, b, c - \text{cifre}, a \neq 0, c \neq 0 \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Din } a - c = 7 \text{ rezultă că } a = 7 + c, \text{ deci } c = 1 \text{ sau } c = 2 \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Dacă } c = 1, a = 8 \text{ și cum } \overline{8b1} = 3 \cdot \overline{1b8} + 175, \text{ rezultă că}$$

$$801 + 10b = 3 \cdot (108 + 10b) + 175 \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Obținem } 302 = 20b, \text{ dar } b \text{ e cifră, ca urmare în acest caz nu avem soluție.} \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Dacă } c = 2, a = 9 \text{ și cum } \overline{9b2} = 3 \cdot \overline{2b9} + 175, \text{ rezultă că}$$

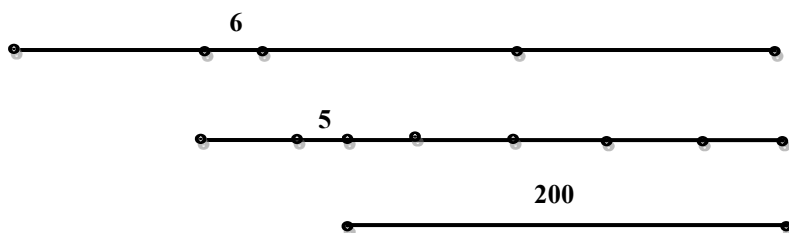
$$902 + 10b = 3 \cdot (209 + 10b) + 175 \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Obținem } 100 = 20b, \text{ deci } b = 5 \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Așadar, numărul este: } 952 \dots\dots\dots 2p$$

3. Un elev citește o carte în trei zile. În prima zi citește cu 6 pagini mai puțin decât o treime din numărul total de pagini. A doua zi citește cu 5 pagini mai mult decât o șesime din numărul paginilor rămase, iar a treia zi citește restul de 200 de pagini. Câte pagini are cartea?

Soluție:



Din figură se observă că $200 + 5 = 205$ reprezintă cinci șesimi din numărul de pagini rămase de citit după prima zi. 3p

Deci, o șesime înseamnă $205 : 5 = 41$ pagini. 3p

Numărul paginilor rămase după prima zi reprezintă șase șesimi, adică $41 \cdot 6 = 246$ pagini. 3p

Cele 246 de pagini reprezintă două treimi din total plus încă 6 pagini. 3p

Două treimi din total este egal cu $246 - 6 = 240$ pagini. 3p

O treime din total este egală cu $240 : 2 = 120$ pagini. 3p

Numărul total de pagini este egal cu $120 \cdot 3 = 360$ 2p



- 4. a)** La început, pe tablă sunt scrise numerele 1995, 1996, 1997, ..., 2024, 2025, 2026. Maria alege două dintre numerele scrise pe tablă, le șterge, apoi scrie pe tablă diferența dintre cele două numere șterse. Maria repetă aceste operații până când pe tablă rămâne un singur număr. Arătați că, indiferent de alegerile Mariei, numărul rămas este mereu par.
- b)** Determinați numerele naturale x și y pentru care $x^{y-2026} + x = 2027$.

Soluție:

- 4. a)** Suma numerelor de pe tablă este un număr par **2p**
Pe tablă rămâne mereu un număr par de numere impare (la orice operație, numărul de numere impare fie scade cu 2, fie rămâne neschimbat)..... **3p**
Dacă Maria șterge două numere care au aceeași paritate, atunci diferența numerelor șterse este pară, ca urmare suma numerelor rămase e pară..... **5p**
Dacă Maria șterge două numere care au parități diferite, atunci diferența numerelor șterse este impară, ca urmare suma numerelor rămase e pară..... **5p**
În concluzie, numărul rămas pe tablă este par..... **5p**
- b)** Orice număr ridicat la o putere nenulă nu își schimbă paritatea, deci dacă $y - 2026 \neq 0$, $x^{y-2026} + x$ este un număr par..... **5p**
Deoarece 2027 este impar, cazul $y - 2026 \neq 0$ este imposibil..... **3p**
Dacă $y - 2026 = 0$, obținem $y = 2026$ **1p**
Atunci $1 + x = 2027$, de unde $x = 2026$ **1p**